page 128 1986 E.N.S.I. de Chimie Groupe Sup. Mathématiques

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

N.B. Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations claires, concises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur, non plus qu'une référence à un théorème du cours non précisé.
Les candidats doivent respecter les notations du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.
Chaque correcteur étant muni d'un exemplaire du présent énoncé, il est inutile de le recopier.

I

On s'intéresse à la fonction y de la variable réelle x définie par

$$y(x) = \frac{\ln x}{x(x-1)}$$ où ln désigne le logarithme népérien

1° Préciser l'ensemble de définition D de y. Montrer que y (x) a une limite l lorsque x tend vers 1, et calculer cette limite.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{cases} f(x) = y(x) & \forall x \in D \\ f(1) = l \end{cases}$$

est elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

2° Calculer, en tout point x où elle est définie, la dérivée f'(x) de f.

3° La fonction dérivée f' est elle définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

4° Etudier les variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f et tracer soigneusement sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes x'ox et y'oy.

5° Démontrer que f est développable en série de Taylor au voisinage de 1 et écrire ce développement en précisant son rayon de convergence.

6° Démontrer que f a des dérivées de tous ordres sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ la valeur de la dérivée n-ième de f au point x = 1.

II

A - 1° Etablir la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(x-1)}\,dx$$

Désignant par I sa valeur, vérifier que $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,dx$

2° Calculer, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$ la somme

$$e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-kx}$$

3° Déterminer C dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_0^{+\infty} \frac{x\,e^{-kx}}{e^x - 1}\,dx \leq \frac{C}{k}$

4° Calculer, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x\,e^{-px}\,dx$

5° Montrer que $I = \sum_1^{\infty} \frac{1}{p^2}$

6° Calculer I à 10^{-2} près.

B - 1° Soit g la fonction de la variable réelle x, périodique de période 2π, telle que $g(x) = x^2$ pour tout x dans $[-\pi, +\pi]$. Calculer son développement en série de Fourier.

2° Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la série de Fourier précédente a pour somme g (x) et en déduire la valeur exacte de I.

Tournez la page S. V. P.

C - 1° Calculer la solution générale de l'équation différentielle

$$(E)\quad x^2(x-1)\,y' + x\,(2x-1)\,y = 1$$

2° Montrer qu'il existe une solution de (E) et une seule qui soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner cette solution.

III

Dans cette partie, on désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont les éléments sont les fonctions réelles φ, définies et continues sur $[1, +\infty[$, telles que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\sqrt{x} = 0$

A - 1° Etudier, pour toute fonction φ de E, la convergence de l'intégrale impropre

$$\xi(\varphi) = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y}\,dy$$

Vérifier que l'application de E dans $\mathbb{R}$ associant à tout élément φ de E le réel $\xi(\varphi)$ est une forme linéaire sur E.

2° Vérifier que les fonctions G et H définies sur $[1 +\infty[$ par

$$G(x) = \frac{\ln x}{x-1}\ \forall x>1,\ G(1) = 1$$

et

$$H(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

respectivement, appartiennent à E. Calculer $\xi(G)$ et $\xi(H)$.

3° K désignant la fonction des deux variables x et y définie, pour $x\geq 1$ et $y\geq 1$ par

$$K(x, y) = \frac{1}{y}\,G(x)$$

montrer qu'en associant à toute fonction φ de E la fonction $h = T\varphi$ définie sur $[1, +\infty[$ par

$$h(x) = \int_1^{+\infty} K(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$

on définit un endomorphisme T de E, dont on déterminera l'image Im (T) Montrer que son noyau Ker (T) n'est pas réduit à la fonction nulle.

4° Déterminer le spectre de T, que l'on notera Spec T, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de T, ainsi que le sous espace propre correspondant à chacune de ces dernières.

B - On considère l'équation

$$(F)\ \varphi(x) - \mu\int_1^{+\infty} K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \ell(x)$$

où μ est un paramètre scalaire et ℓ une fonction donnée de E, φ étant la fonction inconnue.

1° Dans l'hypothèse où (F) admet une solution φ dans E, montrer que

$$\forall x\in[1, +\infty[,\ \varphi(x) = \ell(x) + \alpha G(x)$$

où α est une constante que l'on exprimera en fonction de μ et $\xi(\varphi)$.
En déduire que $\xi(\varphi)$ est solution d'une équation algébrique du premier degré à une inconnue, que l'on écrira.

2° a) Montrer que si $\frac{1}{\mu}$ n'appartient pas à Spec T, (F) admet une solution unique que l'on écrira.

b) Dans l'hypothèse où $\frac{1}{\mu}$ appartient à Spec T, écrire une condition nécessaire et suffisante, portant sur la fonction ℓ, pour que (F) soit résoluble.

3° a) Résoudre l'équation $\varphi(x) - \mu\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-1)y}\,\varphi(y)\,dy = \frac{\ln x}{x-1}$ (F_1) $\forall \mu \neq \frac{6}{\pi^2}$

b) Résoudre l'équation $\varphi(x) - \frac{6}{\pi^2}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-1)\,y}\,\varphi(y)\,dy = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ (F_2)

C - On se propose de résoudre l'équation

$$\varphi(x) - \mu\int_1^{+\infty} K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = G(x)\ (F_1)\ \forall \mu \neq \frac{6}{\pi^2}$$

par approximations successives. Pour cela on pose :

$\varphi_0 = G$ (G étant la fonction définie dans la partie III, A, 2°)
$\varphi_1 = T\varphi_0$
$\varphi_n = T\varphi_{n-1}$

Montrer que la suite de fonctions $F_n = \sum_{p=0}^{n} \mu^p\,\varphi_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la solution de (F_1) lorsque μ est suffisamment petit.

E.N.S.I. de Chimie
Groupe Sud. Mathématiques
1986
page 129